

ETUDE DU COMPORTEMENT NON LINEAIRE DU BETON ARME (non linéarité physique)

Par

Abdelatif HAFSI

Ingénieur T.P. - Etudiant en Magister à l'ENTP (Alger)

Résumé

Une meilleure connaissance du comportement du béton armé passe nécessairement par une analyse non linéaire, celle-ci étant due essentiellement à la non linéarité des lois de comportement des matériaux.

L'étude sous un chargement statique est réalisée pour une section sollicitée en flexion composée avec différentes lois de comportement du béton.

Différents événements remarquables ont été localisés sur les courbes de chargement tels que la plastification et la rupture des aciers tendus ainsi que l'atteinte du pic de contrainte et la rupture en compression du béton.

Un programme d'établissement des courbes de comportement a été développé afin d'étudier l'influence des différents paramètres.

Mots clés : Comportement - non linéarité - courbure - ductilité - plasticité - rupture - interaction.

1 INTRODUCTION

Bien que plusieurs des premières études sur le béton armé étaient basées sur la théorie de résistance ultime (Thullie 1897, Ritter 1899), la théorie élastique a été généralement admise, en grande partie, parce qu'elle était déjà utilisée pour les autres matériaux de construction.

Les essais ont montré que le dimensionnement avec la théorie élastique sous réserve de choisir des valeurs adéquates pour les contraintes admissibles conduit à des structures ayant un bon comportement et une marge de sécurité suffisante.

Récemment, il y a eu une tendance vers les théories de résistance ultime. Les longues années d'études et les expériences faites à travers le monde ont confirmé que la théorie élastique avait beaucoup d'inconvénients dont l'économie n'était pas la moindre.

Les sections en béton armé ont, en effet, un comportement non élastique sous de grandes charges.

La théorie élastique ne peut donc pas prévoir le comportement exact du béton armé en raison de l'apparition de déformations non élastiques.

L'analyse non linéaire des structures en béton armé conduit à une bonne connaissance de la ductilité des structures.

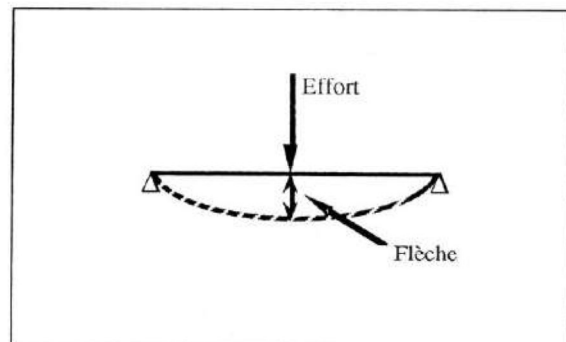
La considération donc de la non linéarité physique c'est-à-dire celle due aux lois de comportement des matériaux, est à la base de notre étude.

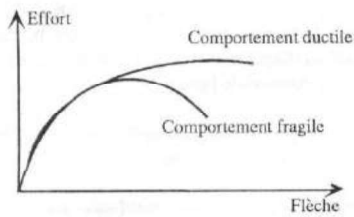
2 ETUDE DU COMPORTEMENT SOUS-CHARGES STATIQUES

2.1 Objectifs

Les éléments en béton armé peuvent présenter deux types de comportement après l'atteinte de l'effort ultime :

- un comportement **Ductile**,
- un comportement **Fragile**.





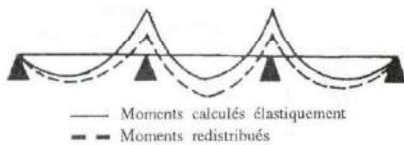
L'étude du comportement des éléments structuraux est nécessaire pour :

a) Eviter les ruptures brutales des éléments.

Une structure doit permettre d'assez grandes déformations avant effondrement pour sauver des vies humaines dans le cas où cette structure est chargée jusqu'à la rupture.

b) Les répartitions des sollicitations utilisées dans le calcul dépendent de la ductilité des éléments aux sections critiques, donc une distribution des moments fléchissants différente de celle obtenue par analyse linéaire peut être faite.

Cette redistribution des moments permet de diminuer l'encombrement (ou la congestion) du ferrailage au droit des appuis des poutres continues et de réduire les maxima des enveloppes des moments fléchissants.



Le comportement des éléments des structures dépend des caractéristiques "Moment-Courbure" des sections, étant donné que les déformations des éléments structuraux sont dues essentiellement à la flexion.

2.2 Lois de comportement des matériaux

a) **Béton** : Une loi de comportement est la relation liant les contraintes aux déformations d'un matériau, celle-ci étant déterminée par un procédé expérimental.

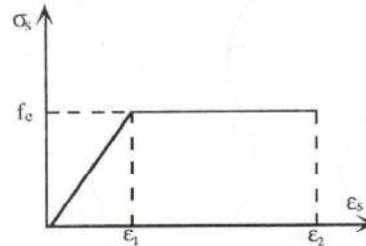
Pour le béton on choisit la loi donnée par Sargin [3], celle-ci offre des possibilités intéressantes car elle englobe d'autres lois telle que la loi "parabole-rectangle" et celle de "Desayi-Krishnan".

Son expression analytique est la suivante : (voir figure ci-contre)

$$\sigma_b = f_c \frac{K \left[\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{co}} \right] + (K'-1) \left[\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{co}} \right]^2}{1 + (K-2) \left[\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{co}} \right] + K' \left[\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{co}} \right]^2}$$

b) **Acier** : Pour les aciers on adopte une loi "élasto-plastique" (aciers naturels) qui a pour expression analytique :

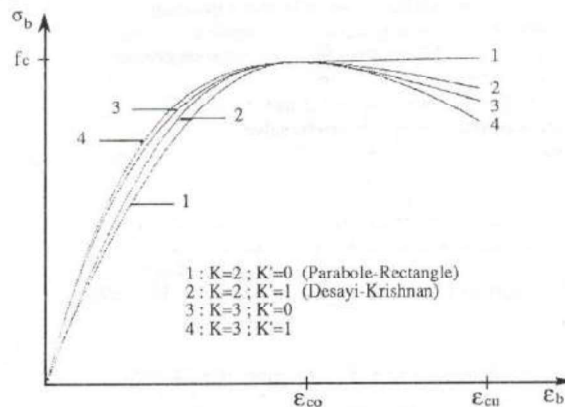
$$\begin{cases} \sigma_s = E_s \varepsilon_s & \text{pour } 0 < \varepsilon_s < \varepsilon_1 \\ \sigma_s = f_e & \text{pour } \varepsilon_1 < \varepsilon_s < \varepsilon_2 \end{cases}$$



2.3 Hypothèses fondamentales

- ✓ Conservation des sections planes (hypothèse de Navier-Bernouilli).
- ✓ Pas de glissement relatif entre les armatures et le béton.
- ✓ La résistance à la traction du béton est supposée nulle.
- ✓ Les lois de comportement des matériaux sont celles adoptées en 2-2.
- ✓ La flexion est plane.

NB : Il est supposé que l'effet du fluage et celui du retrait pour le béton sont négligeables pour des charges de courtes durées.

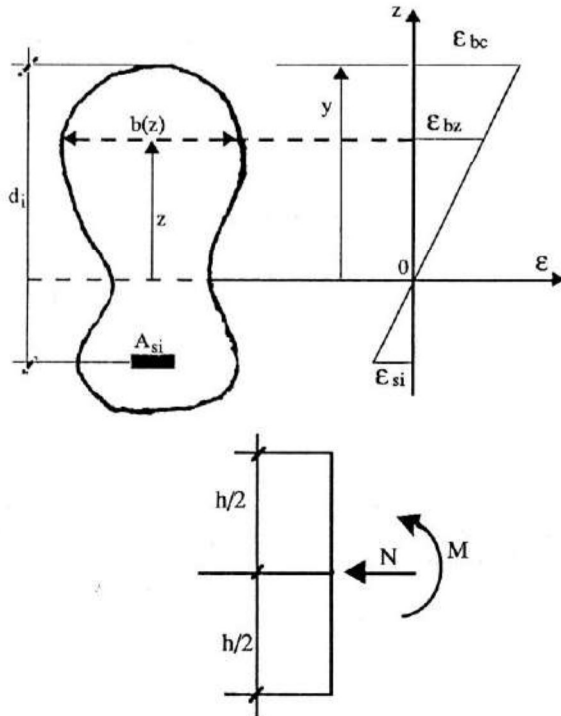


- 1 : K=2; K'=0 (Parabole-Rectangle)
- 2 : K=2; K'=1 (Desayi-Krishnan)
- 3 : K=3; K'=0
- 4 : K=3; K'=1

Allure de la loi de SARGIN pour différentes valeurs de K et K'

2.4 Etablissement des équations d'équilibre

Considérons une section d'une poutre en béton armé de hauteur totale h et de largeur variable b , soumise à un effort normal N et un moment de flexion M appliqués à mi-hauteur.



avec :

ϵ_{bc} : la déformation de la fibre supérieure de la section

ϵ_{bz} : la déformation de la fibre située à une ordonnée z

ϵ_{si} : la déformation de l'acier i

A_{si} : la section d'acier i

d_i : la distance de l'acier i à la fibre supérieure

$b(z)$: la largeur de la section à l'ordonnée z

y : la distance de l'axe neutre à la fibre supérieure

L'équilibre des forces et des moments agissant sur la section est donné par les équations suivantes :

$$\int_0^y b(z)\sigma_b(z)dz + \sum_i A_{s_i}\sigma_{s_i} = N \quad (1)$$

$$\int_0^y b(z)\sigma_b(z)\left(z + \frac{h}{2} - y\right)dz + \sum_i A_{s_i}\sigma_{s_i}\left(\frac{h}{2} - d_i\right) = M \quad (2)$$

Les contraintes σ_b et σ_{s_i} , fonctions des déformations ϵ_b et ϵ_s , sont données par les lois de comportement du béton et de l'acier.

Pour une section rectangulaire de largeur b , plusieurs cas de figure du diagramme de déformation peuvent se présenter selon la position de l'axe neutre.

L'étude des différents cas, en opérant au changement de variables suivant :

$$z = \epsilon_{bz} \left(\frac{y}{\epsilon_{bc}} \right) \longrightarrow dz = \left(\frac{y}{\epsilon_{bc}} \right) d\epsilon_{bz}$$

$$\text{et } \epsilon_{s_i} = \epsilon_{bc} \frac{(y - d_i)}{y}$$

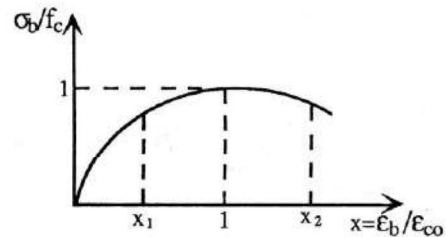
La loi de comportement du béton peut se mettre sous la forme suivante :

$$\sigma_b = f_c \cdot f \left(\frac{\epsilon_b}{\epsilon_{co}} \right)$$

avec :

ϵ_{co} : déformation au pic de contrainte

f_c : contrainte de pic

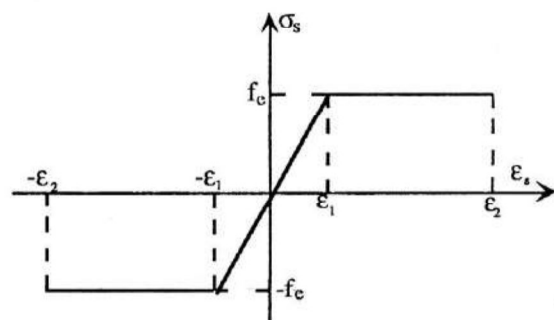


De même, pour l'acier la loi de comportement peut se mettre sous la forme suivante :

$$s_i^* = \begin{cases} \frac{\epsilon_{s_i}}{\epsilon_1} & \text{si } -\epsilon_1 < \epsilon_{s_i} < +\epsilon_1 \\ 1 & \text{si } \epsilon_{s_i} > \epsilon_1 \\ -1 & \text{si } \epsilon_{s_i} < -\epsilon_1 \end{cases}$$

avec :

$$\sigma_{s_i} = f_c s_i^*$$



Les deux équations d'équilibre deviennent :

$$by \frac{\epsilon_{co}}{\epsilon_{bc}} f_c A^* + f_c bh \sum_i w_i s_i^* = N \quad (1)$$

$$by^2 \frac{\epsilon_{co}^2}{\epsilon_{bc}^2} f_c B^* + \left(\frac{h}{2} - y\right) by f_c A^* + f_c bh \sum_i w_i s_i^* \left(\frac{h}{2} - d_i\right) = M \quad (2)$$

$$A^* = \int_{v_i}^{vf} \phi(x) dx ; \quad B^* = \int_{v_i}^{vf} \phi(x) x dx ; \quad W_i = \frac{AS_i}{bh}$$

avec :

$$VF = \frac{\epsilon_{bc}}{\epsilon_{co}}$$

$$VI = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < y < h \\ \frac{\epsilon_{bl}}{\epsilon_{co}} = \frac{\epsilon_{bc}}{\epsilon_{co}} \frac{y-h}{y} & \text{si non} \end{cases}$$

et

$$\phi(x) = \frac{KX + (K' - 1) X^2}{1 + (K - 2)X + K' X^2} \quad (\text{Loi de SARGIN})$$

Divisons respectivement par $f_c bh$ et $f_c bh^2$ les deux équations d'équilibre pour rendre *adimensionnels* les différents paramètres.

Le système devient :

$$\alpha \frac{\epsilon_{co}}{\epsilon_{bc}} A^* + RF \sum_i w_i s_i^* = N^* \quad (1'')$$

$$\alpha^2 \frac{\epsilon_{co}^2}{\epsilon_{bc}^2} B^* + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \alpha \frac{\epsilon_{co}}{\epsilon_{bc}} A^* + RF \sum_i w_i s_i^* (0,5 - \delta_i) = M^* \quad (2'')$$

avec :

$$\alpha = \frac{y}{h} ; \quad \delta_i = \frac{d_i}{h} ; \quad RF = \frac{f_c}{f_c} ;$$

$$N^* = \frac{N}{bh f_c} ; \quad M^* = \frac{M}{bh^2 f_c}$$

Naturellement on doit évaluer les valeurs des intégrales A^* et B^* .

Les équations (1'') et (2'') constituent un système d'équations implicites non linéaires.

Elles relient les sollicitations (M^* , N^*) aux déformations ϵ_{bc} et y .

Connaissant α , on calcule à partir de la deuxième équation la courbure (ϕ^*) et le moment (M^*).

$$\phi^* = \phi h = \frac{\epsilon_{bc}}{y} \quad \phi : \text{courbure réelle de la section}$$

Calculer α à partir de la première équation revient à résoudre une équation non linéaire.

La non linéarité provient des termes A^* et S_i^* eux mêmes fonctions de α .

2.5 Résolution de la 1ère équation d'équilibre

On a :

$$\alpha \frac{\epsilon_{co}}{\epsilon_{bc}} A^* + RF \sum_i w_i s_i^* = N^*$$

$$\text{ou encore} \quad \alpha \frac{\epsilon_{co}}{\epsilon_{bc}} A^* + RF \sum_i w_i s_i^* - N^* = 0$$

de la forme $f(\alpha) = 0$ pour ϵ_{bc} fixé.

Plusieurs méthodes de résolution d'une équation non linéaire se présentent, mais la forme de notre équation se prête bien à une résolution par *substitutions successives*.

En effet :

$f(\alpha) = 0$ peut être mise sous la forme $\alpha = F(\alpha)$ avec :

$$\alpha = \frac{\epsilon_{bc}}{\epsilon_{co} A^*} N^* - RF \sum_i w_i s_i^* = F(\alpha)$$

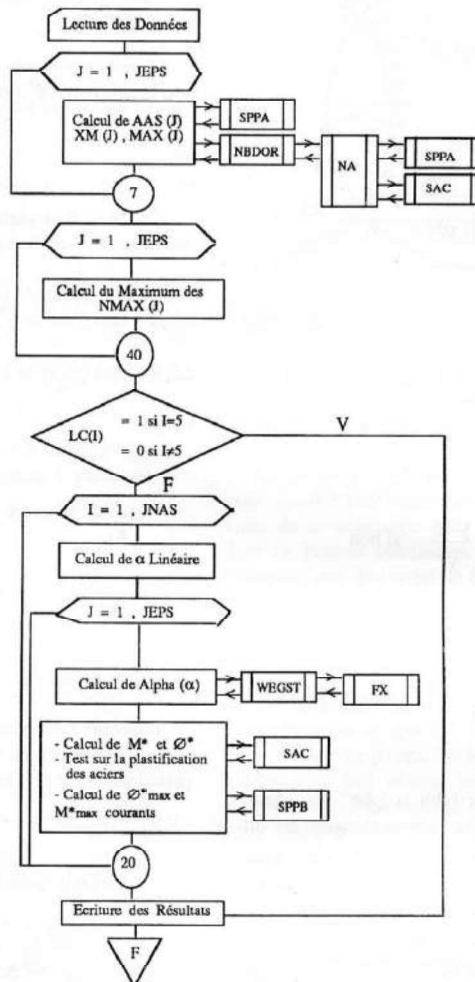
Une amélioration de la convergence de cette méthode est assurée par l'utilisation du *promoteur de convergence* Wegstein [8].

2.6 Etapes de calcul

Un calcul itératif s'impose pour la détermination des courbes de chargement. On commence d'abord par construire une boucle extérieure pour faire varier l'effort normal N^* , puis une seconde boucle pour faire varier la déformation ϵ_{bc} . L'équilibre de la section est assuré par la détermination adéquate de la position de l'axe neutre.

Une fois que l'équilibre est atteint, le couple de valeurs (M^* , ϕ^*) correspondant à l'effort normal donné est calculé (voir organigramme).

ORGANIGRAMME D'ETABLISSEMENT DES COURBES DE COMPORTEMENT



→ [x] Appel du sous-programme X

Les sous-programmes SPPA et SPPB appellent les sous-programmes de calcul de A* et B*

AAS : valeur de A* pour section partiellement comprimée

XM : valeur du bras de levier pour déformation égale à ϵ_{cu}

NMAX : l'effort normal maximum que peut supporter la section

NBDOR : algorithme du nombre d'OR pour la recherche du maximum

NA : valeur de N*

SAC : valeur de Si*

WEGST : promoteur de convergence WEGSTEIN

FX : valeur de F (α)

Les mêmes étapes de calcul permettent l'établissement des courbes suivantes :

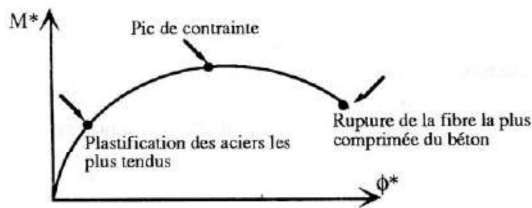
- Effort normal (N^*) - courbure (ϕ^*)
- Effort normal (N^*) - ϵ_{bc}
- Effort normal (N^*) - Moment (M^*) [diagramme d'interaction]
- Moment (M^*) - ϵ_{bc}

2.7 Evénements remarquables

Il est possible à partir des courbes de chargement (M^*, ϕ^*) de localiser le lieu des événements remarquables suivants :

- Fissuration de la fibre la plus tendue du béton
- Plastification du lit d'armatures le plus tendu
- Atteinte du pic de contrainte pour la fibre la plus comprimée du béton
- Rupture en compression de la fibre la plus comprimée du béton
- Rupture des aciers tendus

Voici un exemple classique de courbe de chargement (M^*, ϕ^*) pour un effort N^* fixé.



2.8 Domaine de résistance

En utilisant des lois de comportement de béton et de l'acier proches de la réalité (Modèle non linéaire), on établit ainsi une courbe de comportement ($M^* = f(\phi^*)$; N^* fixe) dont le moment passe par un maximum.

Ainsi, en déterminant pour plusieurs valeurs de N^* les moments maximum des courbes de chargement, on peut définir un domaine (ou frontière) limité par les couples de valeurs (N^*, M^*_{max}), appelé *domaine de résistance* ou *diagramme d'interaction* de la section.

En fait, on ne peut parler de rupture de la section au point (N^*, M^*_{max}) mais d'épuisement de la capacité de résistance de la section.

La frontière ainsi déterminée ne correspond donc pas à la rupture mais à une enveloppe des sollicitations admissibles de la section.

3 CONSTATATIONS GENERALES

Les différentes constatations qui suivront sont le résultat d'une analyse minutieuse des différentes courbes éta-

blis à partir du programme de calcul développé (MC BETON) [1].

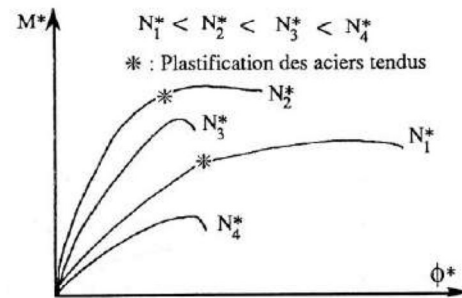
3.1 Diagramme moment-courbure

On constate que les courbes de comportement (M^*, ϕ^* ; N^* donné) passent par un maximum.

Le moment $M^*(\phi^*)$, croît jusqu'à un maximum, puis décroît. La fissuration du béton tendu ainsi que la plastification des aciers tendus se produisent avant l'atteinte de ce maximum, mais la rupture de la fibre la plus comprimée du béton ne se produit qu'après passage par le maximum.

Pour la grande valeur de l'effort normal, la plastification des aciers tendus ne se produit pas. La ductilité est très faible, elle est due seulement aux déformations inélastiques du béton.

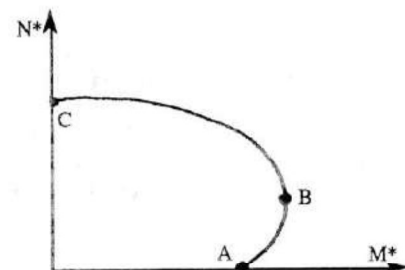
Pour de faibles valeurs de N^* , les aciers tendus se plastifient permettant ainsi une plus grande ductilité.



On remarque bien l'influence de l'allure des lois de comportement du béton sur les courbes de comportement.

3.2 Domaine de résistance (M^*, N^*)

Dans le diagramme d'interaction (M^*, N^*), déduit des courbes de comportement (M^*, ϕ^* , N^* donné) on peut observer sur la frontière deux parties limitées par les arcs AB et BC (voir Figure).



ARC AB : Obtenu pour des valeurs faibles de l'effort normal N^* .

Avant rupture par compression du béton, les aciers les plus tendus se plastifient.

ARC BC : Obtenu pour des valeurs élevées de l'effort normal N^* .
Représente la limite de résistance de la section atteinte sans plastification des aciers tendus.
Le moment maximum est au point B.

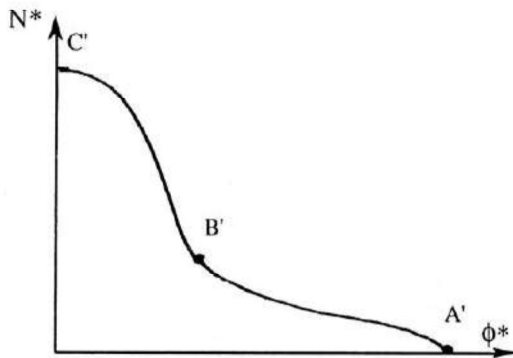
3.3 Diagramme $N^* - \phi^*$

Ce diagramme donne, pour chaque valeur de N^* , la courbure maximale permise par la section.

On distingue deux zones :

Zone A' B' : Les aciers tendus se plastifient, ce qui autorise de grandes courbures donc des ductilités plus grandes.

Zone B' C' : La courbure maximale est atteinte sans la plastification des aciers tendus. Ce qui entraîne de plus faibles ductilités.



4 INFLUENCE DES DIFFERENTS PARAMETRES

4.1 Influence des lois de comportement

L'analyse de plusieurs courbes a montré que la forme de la loi de comportement influe sur le diagramme (M^* , ϕ^*), surtout après le passage par le moment maximum.

Le diagramme (M^* , ϕ^*), correspondant à la loi *parabole-rectangle* ne présente pas une chute après l'atteinte du moment maximum (loi parfaitement plastique après le pic).

Les diagrammes (M^* , ϕ^*), correspondants aux autres lois présentent, par contre, des chutes de moment après passage par le maximum.

Ce qu'on déduit des différents graphes, c'est que plus la loi du béton est *fragile* plus le moment maximum et la courbure maximale sont grands.

La loi *parabole-rectangle* donne des moments plus grands que la loi pour béton "peu fragile" [$K = 3$; $K' = 1$ dans la loi de SARGIN] et des courbures plus grandes que celle de Desayi-Krishnan.

4.2 Influence des quantités d'acier

Il est certain qu'une variation du pourcentage des aciers tendus ou comprimés de la section influe sur son comportement.

Les exemples ont montré qu'une augmentation au niveau des aciers tendus, diminue la courbure maximale et fait augmenter le moment maximum dans la section.

L'analyse de la ductilité a été traitée pour la loi de Desayi-Krishnan pour différents pourcentages d'aciers (symétriques et dissymétriques) et on a déduit ce qui suit :

- En général une section symétrique donne des ductilités plus grandes qu'une section dissymétrique.
- Une augmentation dans les aciers tendus augmente le moment maximum, mais diminue la ductilité.
- Une augmentation des aciers comprimés augmente la ductilité et le moment maximum.

5 CONCLUSION

L'étude qui vient d'être présentée n'est qu'une partie de ce qui devrait être fait pour une analyse non linéaire du comportement du béton armé.

Théoriquement, on vient de confirmer l'influence directe de l'allure des lois de comportement, sur le comportement d'une section en béton armé soumise à une flexion composée.

L'organigramme de calcul a été présenté pour une éventuelle étude qui prendrait en compte les phénomènes instantanés et différés des matériaux tel que le retrait, le fluage et la relaxation.

Notons qu'une étude expérimentale sur un élément de poutre sous charge statique ou dynamique est d'une grande importance pour une analyse de comportement

Le programme réalisé MC BETON est également l'outil de vérification des sections en béton armé avec différentes lois de comportement

6 BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Akrib & A. Hafsi - "Etude du comportement non linéaire du Béton Armé (non linéarité physique)". Thèse d'ingénieur d'état - ENTTP (Alger)- Juin 1988.
- [2] R. Park & T. Pauly - "Reinforced concrete structures"; éd. John Wiley & Sons (1975).
- [3] M. Virlogeux & A. M'rad - "Etude d'une section de poutre en Elasticité non Linéaire". Annales de l'ITBTP série béton 237; Mai 1986.
- [4] L. Plinskin - "Calcul en flexion composée d'une section en béton armé avec des lois de comportement des matériaux quelconques". Annales de l'ITBTP série béton 218; octobre 1983.

- [5] J-L. Lascar - "Etude d'une nouvelle courbe contraintes-déformations du béton". Annales de l'ITBTP série béton 268, décembre 1984.
- [6] A. Grelat - "Comportement non linéaire et stabilité des ossatures en béton armé". Annales de l'ITBTP serie TMC 223, novembre 1978.
- [7] R. Lacroix, A. Fuentes & H. Thonier - "Traité d béton armé"; éd. Eyrolles, 1982.
- [8] M. Boumahrat & A. Gourdin - "Méthodes Numériques Appliquées" OPU 1982 .

